支払いの遅れを許す環境下での品質低下在庫モデルに関する一考察(不確実性下における意思決定問題)

北條, 仁志

数理解析研究所講究録
第 1734 巻 2011 年 140-147

支払いの遅れを許す環境下での品質低下在庫モデルに関する一考察

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
Dept. of Mathematics and Infomation Sciences, Graduate School of Science
Osaka Prefecture University

1 はじめに

多くの古典的在庫モデルでは，企業は制限の無い単一の倉庫を所有し，その中で適切な在庫水準の管理を行なうと仮定されてきた．実際には，大きな在庫をかかえると，制限のある自社倉庫では対応しきれないため，別に倉庫を借りるなどして対応することが多い．そのような２倉庫モデルについて近年では，Dye, Ouyang and Hsieh [6] が倉庫制約とバックログ率が時間に比例した品質低下を伴う製品に対する確定的在庫モデルを提案し，単位時間当たりの利得を最大にする最適解の導出手法について展開している．一方，ＥＯＱモデルや確定的在庫モデルの費用計算の中に信用取引により支払いの遅延を考慮したモデルがここ１０年の間に数多く論文として出版されている [9, 11, 16]．しかしながら，これらの論文は単一倉庫をもつ在庫モデルであり，著者が知る限り２倉庫のモデルはまだ見たことがない．

本稿では，容量制約のある自社倉庫 (OW) と制約の無いレンタル倉庫 (RW) を利用した品質低下を伴う製品に対する確定的在庫モデルを扱う．レンタル倉庫 RW での保管費用は自社倉庫 OW での保管費用より高いと仮定する．このとき，費用を削減するために，レンタル倉庫 RW の商品を先に販売し，RW の商品がすべて無くなった後に自社倉庫 OW の商品を販売することになる．自社倉庫での不足が許され，満たされない需要分に対するバックオーダー率は一定であると仮定する．支払い遅延を考慮した費用の下での単位時間当たりの総利得を最大にする最適補充政策について探求する．

2 記号と仮定

2.1 記号

２倉庫をもつ最適補充計画の数理的モデルを展開するために，本稿では次のような記号を用いる：

- D : （一定の）需要率
- W : OW の最大容量
- A : １回当たりの発注費用
- C : 単位商品当たりの購入費用
- S : 単位商品当たりの販売価格， $S > C$
- C_{11} : OW の単位商品単位時間当たりの保管費用
- C_{12} : RW の単位商品単位時間当たりの保管費用， $C_{12} \geq C_{11}$
- C_2 : OW の単位商品単位時間当たりの不足費用
- R : 単位商品当たりの機会損失費用
- I_c : サプライヤーへ支払う単位時間当たりの利子
- I_d : 支払いまでに得られる単位時間当たりの利子
- Q : １サイクルの発注量（決定変数）
- $P(t_w, t_2)$: ２倉庫による単位時間当たりの総収益
- M : 支払い期限
- α : OW の品質低下率， $0 \leq \alpha < 1$
- β : RW の品質低下率， $0 \leq \beta < 1$
- δ : 不足量に対するバックオーダー率， $0 \leq \delta \leq 1$
- t_w : RW の在庫レベルが 0 になる時刻
- t_1 : OW の在庫レベルが 0 になる時刻
- t_2 : 在庫不足の期間の長さ
- T : 在庫サイクルの長さ， $T = t_1 + t_2$
- $I_1(t)$: RW の時刻 t での正の在庫レベル
- $I_2(t)$: OW の時刻 t での正の在庫レベル
- $I_3(t)$: OW の時刻 t での負の在庫レベル

2.2 仮定

1. 在庫システムでは品質低下を伴う 1 種の製品を扱う.
2. 補充率は無限で，リードタイムは 0 である.
3. システムの計画期間は無限である.
4. 自社倉庫 (OW) は固定の容量 W をもち，レンタル倉庫 (RW) には容量制限がない.
5. RW での保管は OW での保管ほど優れていない，すなわち $\beta \geq \alpha$ とする.
6. OW の製品は RW の製品を使い尽くした後に利用される.
7. 最適解の存在性を保証するために，OW での最大劣化量は需要率より小さい，すなわち $\alpha W < D$ を仮定する.
8. 不足は許される．満たされない需要に対して δ の割合でバックログが許される．残り部分は売り損じとなる.
9. 支払い期限の前には販売収益は利率 I_d での利子を稼ぐために利用される．しかしながら，支払い期限を過ぎると，在庫としてある製品は利率 I_c の利子が費用として課せられる.
10. モデルの簡略化のために，$CI_c\delta \leq SI_d$ を仮定する.

3 数学的定式化

上述のモデルにおける総利得関数を確立するために，計画期間を 3 つの時間区間 $[0,t_w],[t_w,t_1],[t_1,T]$ に分離して考える．$[0,t_w]$ では，RW の製品は需要と品質低下により消費される．OW の製品は品質低下により在庫量が減少するのみである．$[t_w,t_1]$ では，RW の製品はすでに無くなった状態にあり，OW の製品が需要と品質低下により消費される．このときの在庫レベルは正である．$[t_1,T]$ では，製品が不足した状態であり，満たされない需要の一部が次の発注によってバックログされるために蓄積されている．その量は負の在庫レベルとして表される．システムの在庫レベルに関する微分方程式は

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -D - \beta I_1(t), \quad 0 \leq t \leq t_w, \tag{1}$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \begin{cases} -\alpha I_2(t), & 0 \leq t \leq t_w \\ -D - \alpha I_2(t), & t_w \leq t \leq t_1, \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{dI_3(t)}{dt} = -\delta D, \quad t_1 \leq t \leq T \tag{3}$$

で与えられる．初期条件

$$I_1(t_w) = 0; \quad I_2(0) = W; \quad I_2(t_1) = 0; \quad I_3(t_1) = 0 \tag{4}$$

を用いて微分方程式 (1),(2),(3) を解くことにより，時刻 t におけるシステムの在庫レベル $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ を求めることができる：

$$I_1(t) = \frac{D}{\beta}\left[e^{\beta(t_w - t)} - 1\right], \quad 0 \leq t \leq t_w, \tag{5}$$

$$I_2(t) = \begin{cases} We^{-\alpha t}, & 0 \leq t \leq t_w \\ \dfrac{D}{\alpha}\left[e^{\alpha(t_1 - t)} - 1\right], & t_w \leq t \leq t_1, \end{cases} \tag{6}$$

$$I_3(t) = -\delta D(t - t_1), \quad t_1 \leq t \leq T. \tag{7}$$

$I_2(t)$ の時刻 $t = t_w$ での連続性により

$$t_1 = \frac{1}{\alpha}\log\left[e^{\alpha t_w} + \frac{\alpha W}{D}\right] \tag{8}$$

が成り立たなければならない．ゆえに，t_1 は t_w の関数であることがわかる．
本稿での目的は，単位時間当たりの利得

$$\begin{aligned}\text{Profit per unit time} &= \frac{1}{t_1+t_2}\{\text{Sales Revenue}+\text{Earned Interest}\\ &\quad -\text{Ordering Cost}-\text{Holding Cost}-\text{Shortage Cost}\\ &\quad -\text{Opportunity}-\text{Purchase Cost}-\text{Interest Payable}\}\end{aligned}$$

を最大にするような t_w および t_2 を決定することである．
まずは (5),(6),(7) 式から与えられた支払い期限 M に対するサイクル当たりの総利得を導出する．目的関数の導出にあたり，支払い期限 M の時刻について 4 つの場合 (I) $0\le M\le t_w$, (II) $t_w\le M\le t_1$, (III) $t_1\le M\le t_1+t_2$, (IV) $M\ge t_1+t_2$ を考える必要がある．

(I) $0\le M\le t_w$ の場合

このとき，各費用は以下のようになる．

1. サイクル当たりの発注費用 $=A$
2. レンタル倉庫 RW でのサイクル当たりの保管費用 $=C_{12}\int_0^{t_w}I_1(t)dt=\frac{C_{12}D}{\beta^2}\{e^{\beta t_w}-\beta t_w-1\}$
3. 自社倉庫 OW でのサイクル当たりの保管費用 $=C_{11}\int_0^{t_1}I_2(t)dt=\frac{C_{11}}{\alpha}\{W-D(t_1-t_w)\}$
4. サイクル当たりの不足費用 $=C_2\int_{t_1}^{t_1+t_2}(-I_3(t))dt=C_2\delta D\frac{t_2^2}{2}$
5. 売り損じによるサイクル当たりの機会損失費用 $=R\int_{t_1}^{t_1+t_2}(1-\delta)Ddt=RD(1-\delta)t_2$
6. サイクル当たりの購入費用 $=C\{I_1(0)+I_2(0)-I_3(T)\}=C\left\{\frac{D}{\beta}(e^{\beta t_w}-1)+W+\delta Dt_2\right\}$
7. 販売によるサイクル当たりの収益 $=S\left\{\int_0^{t_1}Ddt+\int_{t_1}^{t_1+t_2}\delta Ddt\right\}=SD(t_1+\delta t_2)$
8. 支払いまでに稼げるサイクル当たりの利子 $=SI_d\int_0^M D(M-t)dt=SDI_d\frac{M^2}{2}$
9. サイクル当たりの支払うべき利子
$$\begin{aligned}&=CI_c\left\{\int_M^{t_w}I_1(t)dt+\int_M^{t_1}I_2(t)dt+(-I_3(T))(T-M)\right\}\\ &=CI_c\left\{\frac{D}{\beta^2}[e^{\beta(t_w-M)}-1-\beta(t_w-M)]+\frac{W}{\alpha}e^{-\alpha M}-\frac{D}{\alpha}(t_1-t_w)+\delta Dt_2(t_1+t_2-M)\right\}\end{aligned}$$

よって，$t_w\ge M$ における目的関数は

$$\begin{aligned}P_1(t_w,t_2) &= \frac{1}{t_1+t_2}\Bigg[P_0(t_w,t_2)+SDI_d\frac{M^2}{2}-CI_c\Bigg\{\frac{D}{\beta^2}(e^{\beta(t_w-M)}-1)\\ &\quad -\frac{D}{\beta}(t_w-M)+\frac{W}{\alpha}e^{-\alpha M}-\frac{D}{\alpha}(t_1-t_w)+\delta Dt_2(t_1+t_2-M)\Bigg\}\Bigg] \qquad (9)\end{aligned}$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned}P_0(t_w,t_2) &= SD(t_1+\delta t_2)-A-\frac{C_{12}D}{\beta^2}\{e^{\beta t_w}-\beta t_w-1\}-C_2\delta D\frac{t_2^2}{2}-RD(1-\delta)t_2\\ &\quad -\frac{C_{11}}{\alpha}\{W-D(t_1-t_w)\}-C\left\{\frac{D}{\beta}(e^{\beta t_w}-1)+W+\delta Dt_2\right\} \qquad (10)\end{aligned}$$

である．

(II) $t_w\le M\le t_1$ の場合

$\bar{t} = \frac{1}{\alpha}\log\left[e^{\alpha M} - \frac{\alpha W}{D}\right]$ とおく．費用 1〜8 については (I) の場合と同じである．

9. サイクル当たりの支払うべき利子

$$= CI_c\left\{\int_M^{t_1} I_2(t)dt + (-I_3(T))(T-M)\right\}$$
$$= CI_cD\left\{\frac{1}{\alpha^2}(e^{\alpha(t_1-M)}-1) - \frac{1}{\alpha}(t_1-M) + \delta t_2(t_1+t_2-M)\right\}$$

よって，$\bar{t} \le t_w \le M$ における目的関数は

$$P_2(t_w,t_2) = \frac{1}{t_1+t_2}\Bigg[P_0(t_w,t_2) + SDI_d\frac{M^2}{2} - CI_cD\left\{\frac{1}{\alpha^2}(e^{\alpha(t_1-M)}-1) - \frac{1}{\alpha}(t_1-M) + \delta t_2(t_1+t_2-M)\right\}\Bigg] \tag{11}$$

となる．

(III) $t_1 \le M \le t_1+t_2$ の場合

$\tilde{t} = \frac{1}{\alpha}\log\left[e^{\alpha(M-t_2)} - \frac{\alpha W}{D}\right]$ とおく．費用 1〜7 については (I) の場合と同じである．

8. 支払いまでに稼げるサイクル当たりの利子

$$= SI_d\left\{\int_0^{t_1} D(t_1-t)dt + Dt_1(M-t_1)\right\} = SI_dDt_1\left(M-\frac{t_1}{2}\right)$$

9. サイクル当たりの支払うべき利子

$$= CI_c(-I_3(T))(T-M) = CI_c\delta Dt_2(t_1+t_2-M)$$

よって，$\tilde{t} \le t_w \le \bar{t}$ における目的関数は

$$P_3(t_w,t_2) = \frac{1}{t_1+t_2}\left[P_0(t_w,t_2) + SI_dDt_1\left(M-\frac{t_1}{2}\right) - CI_c\delta Dt_2(t_1+t_2-M)\right] \tag{12}$$

となる．

(IV) $M \ge t_1+t_2$ の場合

費用 1〜7 については (I) の場合と同じである．

8. 支払いまでに稼げるサイクル当たりの利子

$$= SI_d\left\{\int_0^{t_1} D(t_1-t)dt + Dt_1(M-t_1) + (-I_3(T))(M-T)\right\}$$
$$= SI_dD\left\{t_1\left(M-\frac{t_1}{2}\right) + \delta t_2(M-t_1-t_2)\right\}$$

9. サイクル当たりの支払うべき利子　$=0$

よって，$0 \le t_w \le \tilde{t}$ における目的関数は

$$P_4(t_w,t_2) = \frac{1}{t_1+t_2}\left[P_0(t_w,t_2) + SI_dD\left\{t_1\left(M-\frac{t_1}{2}\right) + \delta t_2(M-t_1-t_2)\right\}\right] \tag{13}$$

となる．

我々の問題は，与えられた M に対して目的関数

$$P(t_w,t_2) = \begin{cases} P_1(t_w,t_2), & t_w \ge M \\ P_2(t_w,t_2), & \bar{t} \le t_w \le M \\ P_3(t_w,t_2), & \max\{0,\tilde{t}\} \le t_w \le \bar{t} \\ P_4(t_w,t_2), & 0 \le t_w \le \max\{0,\tilde{t}\} \end{cases} \tag{14}$$

を最大にするような t_w, t_2 を求めることである．

4 最適政策

(I) $0 \le M \le t_w$ の場合について解析を行う．$\frac{\partial P_1(t_w,t_2)}{\partial t_w} = 0, \frac{\partial P_1(t_w,t_2)}{\partial t_2} = 0$ とおくとき，この連立方程式を整理すると，

$$P_1(t_w,t_2) = \frac{\partial P_0(t_w,t_2)}{\partial t_w}\frac{dt_w}{dt_1} - CI_cD\left\{\frac{1}{\beta}[e^{\beta(t_w-M)}-1]\frac{dt_w}{dt_1} - \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{dt_w}{dt_1}\right)+\delta t_2\right\}, \quad (15)$$

$$P_1(t_w,t_2) = \frac{\partial P_0(t_w,t_2)}{\partial t_2} - CI_c\delta D(t_1+2t_2-M) \quad (16)$$

を得る．(15) と (16) は等価であるので，

$$(C_2+CI_c)\delta t_2 = K_1(t_w) \quad (17)$$

が導ける．そこで，

$$K_1(t_w) = K_0(t_w) + CI_c\left[e^{\alpha(t_1-t_w)}\left\{\frac{1}{\beta}e^{\beta(t_w-M)} - \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right\} - \frac{1}{\alpha} - \delta(t_1-M)\right], \quad (18)$$

$$K_0(t_w) = e^{\alpha(t_1-t_w)}\left[\frac{C_{12}}{\beta}(e^{\beta t_w}-1)+\frac{C_{11}}{\alpha}+Ce^{\beta t_w}\right] - (S+R)(1-\delta) - C\delta - \frac{C_{11}}{\alpha} \quad (19)$$

である．(16) 式，(17) 式の連立方程式で解くため，それぞれの関数について性質を調べる．(17) 式の左辺は t_2 の線形増加関数であり，$t_2 \ge 0$ に対して非負の値をとる．右辺の関数 $K_1(t_w)$ の 1 階導関数 $K_1'(t_w)$ の C,CI_c,C_{11}&C_{12} の各項はパラメータの仮定により正の値をとることがわかる．よって，すべての $t_w(\ge M)$ に対して $K_1'(t_w) > 0$，すなわち $K_1(t_w)$ は t_w の狭義増加関数である．また，

$$\lim_{t_w\to\infty} K_1(t_w) = +\infty \quad (20)$$

である．以上の議論により，次の結果が得られる．

補題 1 $F_1(t_2) = (C_2+CI_c)\delta t_2 - K_1(t_w)$ とおく．

(a) $K_1(M) \ge 0$ ならば，すべての $t_w(\ge M)$ に対して方程式 $F_1(t_2) = 0$ を満たす唯一の解 t_2 が存在する．

(b) $K_1(M) < 0$ ならば，$K_1(\tau_1) = 0$ となる解 $t_w = \tau_1(\ge M)$ が存在する．そのとき，$t_w \ge \tau_1$ であるすべての t_w に対しては方程式 $F_1(t_2) = 0$ を満たす唯一の解 t_2 が存在し，$M \le t_w < \tau_1$ に対しては方程式 $F_1(t_2) = 0$ を満たす解は存在しない．

方程式 $F_1(t_2) = 0$ を満たす解 t_2 が存在しないとき，すべての $t_2 \in [0,\infty)$ に対して $F_1(t_2) > 0$ である．(16) 式より

$$\frac{\partial P_1(t_w,t_2)}{\partial t_w} = \frac{1}{t_1+t_2}\frac{dt_1}{dt_w}DF_1(t_2) > 0 \quad (21)$$

となる．よって，このときには $P_1(t_w,t_2)$ は t_w について狭義増加関数である．

一方，$F_1(t_2) = 0$ の解が存在するとき，方程式を t_2 について解くと

$$t_2 = \frac{K_1(t_w)}{(C_2+CI_c)\delta} \quad (22)$$

を得る．すなわち，方程式を満たすとき，t_2 は t_w の関数であると解釈できる．$K_1'(t_w) > 0$ よりすべての $t_w \ge M$ に対して

$$\frac{dt_2}{dt_w} = \frac{K_1'(t_w)}{(C_2+CI_c)\delta} > 0 \quad (23)$$

を得る．次に，$F_1(t_2)=0$ の解が存在する条件の下でもう一方の方程式 (16) について解析を行う．今，

$$G_1(t_w)=\frac{\partial P_0(t_w,t_2)}{\partial t_2}-CI_c\delta D(t_1+2t_2-M)-P_1(t_w,t_2)$$

とおくと，方程式 (16) は $G_1(t_w)=0$ と同値である．(17),(23) より

$$G_1'(t_w)=-CIc\delta D(t_1+t_2)\frac{dt_1}{dt_w}-(C_2+2CI_c)\delta D(t_1+t_2)\frac{dt_2}{dt_w}<0 \tag{24}$$

となる．よって，$G_1(t_w)$ は t_w の狭義減少関数である．また，

$$\lim_{t_w\to\infty}G_1(t_w)=-\infty \tag{25}$$

である．以上の議論より，次の結果が得られる．

補題 2 方程式 $F_1(t_2)=0$ が成り立つとする．

(a) $G_1(M)\geq 0$ ならば，方程式 $G_1(t_w^*)=0$ を満たす唯一の解 $t_w^*\in[M,\infty)$ が存在する．
(b) $G_1(M)<0$ ならば，方程式 $G_1(t_w)=0$ を満たす解は $[M,\infty)$ 上に存在しない．このとき，$[M,\infty)$ の中での t_w の最適値は $t_w^*=M$ でとる．

(II),(III),(IV) の場合にも同様の解析方法により同様の結果が得られる．関数 $P(t_w,t_2)$ の (I),(II),(III) の境界部分での連続性および t_w の 1 階導関数における連続性により，(I),(II),(III) についての結果をまとめると次のようになる．

補題 3

$$\begin{aligned}
K(t_w) &= \begin{cases} K_1(t_w), & t_w\geq M\\ K_2(t_w), & \bar{t}\leq t_w\leq M\\ K_3(t_w), & \tilde{t}\leq t_w\leq \bar{t},\end{cases}\\
K_2(t_w) &= K_0(t_w)+CI_c\left\{\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha(t_1-M)}-1)-\delta(t_1-M)\right\},\\
K_3(t_w) &= K_0(t_w)-SI_d(M-t_1)-CI_c\delta(t_1-M),\\
F(t_2) &= (C_2+CI_c)\delta t_2-K(t_w)
\end{aligned}$$

とおく．

(a) $K_3(\tilde{t})\geq 0$ ならば，すべての $t_w(\geq\tilde{t})$ に対して $F(t_2)=0$ を満たす t_2 が唯一存在する．
(b) $K_3(\tilde{t})<0$ ならば，$K(\tau)=0$ を満たす唯一の解 $t_w=\tau$ が $[\tilde{t},\infty)$ 上に存在する．このとき，すべての $t_w\in[\tau,\infty)$ に対して方程式 $F(t_2)=0$ を満たす唯一の解 t_2 が存在する．一方，$t_w\in[\tilde{t},\tau)$ に対しては方程式 $F(t_2)=0$ を満たす解が存在せず，$[\tilde{t},\tau]$ の中での t_w の最適値は $t_w^*=\tau$ でとる．

補題 4

$$\begin{aligned}
G(t_w) &= \begin{cases} G_1(t_w), & t_w\geq M\\ G_2(t_w), & \bar{t}\leq t_w\leq M\\ G_3(t_w), & \tilde{t}\leq t_w\leq \bar{t},\end{cases}\\
G_2(t_w) &= \frac{\partial P_0(t_w,t_2)}{\partial t_2}-CI_c\delta D(t_1+2t_2-M)-P_2(t_w,t_2),\\
G_3(t_w) &= \frac{\partial P_0(t_w,t_2)}{\partial t_2}-CI_c\delta D(t_1+2t_2-M)-P_3(t_w,t_2)
\end{aligned}$$

とおく．方程式 $F(t_2)=0$ が成り立つとする．

(a) $G_3(\tilde{t}) \geq 0$ ならば，方程式 $G(t_w^*) = 0$ を満たす唯一の解 $t_w^* \in [\tilde{t}, \infty)$ が存在する．
(b) $G_3(\tilde{t}) < 0$ ならば，方程式 $G(t_w) = 0$ を満たす解は $[\tilde{t}, \infty)$ 上に存在しない．このとき，$[\tilde{t}, \infty)$ の中での t_w の最適値は $t_w^* = \tilde{t}$ でとる．

(IV) $M \geq t_1 + t_2$ における結果は次のようになる．

補題 5

$$
\begin{aligned}
K_4(t_w) &= K_0(t_w) - SI_d(1-\delta)(M - t_1), \\
F_4(t_2) &= (C_2 + SI_d)\delta t_2 - K_4(t_w)
\end{aligned}
$$

とおく．

(a) $K_4(\tilde{t}) < 0$ ならば，方程式 $F_4(t_2) = 0$ を満たす解 t_2 は存在しない．このとき，$[0, \tilde{t}]$ の中での t_w の最適値は $t_w^* = \tilde{t}$ でとる．
(b) $K_4(0) \leq 0$ かつ $K_4(\tilde{t}) \geq 0$ ならば，$K_4(\tau_4) = 0$ を満たす唯一の解 $t_w = \tau_4$ が $[0, \tilde{t}]$ 上に存在する．そのとき，$0 \leq t_w < \tau_4$ であるすべての t_w に対しては方程式 $F_4(t_2) = 0$ を満たす解が存在せず，$[0, \tau_4]$ の中での t_w の最適値は $t_w^* = \tau_4$ でとる．一方，$\tau_4 \leq t_w \leq \tilde{t}$ に対しては方程式 $F_4(t_2) = 0$ を満たす唯一の解 t_2 が存在する．
(c) $K_4(0) > 0$ ならば，方程式 $F_4(t_2) = 0$ を満たす唯一の解 t_2 が存在する．

補題 6

$$
G_4(t_w) = \frac{\partial P_0(t_w, t_2)}{\partial t_2} + SI_d\delta D(M - t_1 - 2t_2) - P_4(t_w, t_2)
$$

とおく．方程式 $F_4(t_2) = 0$ が成り立つと仮定する．

(a) $G_4(\tilde{t}) > 0$ ならば，方程式 $G_4(t_w) = 0$ を満たす解は $[0, \tilde{t}]$ 上に存在しない．このとき，$[0, \tilde{t}]$ の中での t_w の最適値は $t_w^* = \tilde{t}$ でとる．
(b) $G_4(\tilde{t}) \leq 0$ かつ $G_4(0) \geq 0$ ならば，方程式 $G_4(t_w^*) = 0$ を満たす唯一の解 $t_w^* \in [0, \tilde{t}]$ が存在する．
(c) $G_4(0) < 0$ ならば，方程式 $G_4(t_w) = 0$ を満たす解は $[0, \tilde{t}]$ 上に存在しない．このとき，$[0, \tilde{t}]$ の中での t_w の最適値は $t_w^* = 0$ でとる．

補題３，４により得られる (I),(II),(III) 上での最適解と補題５，６により得られる (IV) 上での最適解を比較することにより，我々の問題に対する最適解 (t_w^*, t_2^*) が求められる．

5 最後に

本稿では，支払いの遅延を考慮した２倉庫での劣化製品に対する確定的在庫管理モデルを扱った．与えられた支払い期限に対して単位時間当たりの総収益を最大にするような最適な倉庫ＲＷの在庫レベルが０となる時刻 t_w^* および在庫不足の期間の長さ t_2^* を解析的に求めた．このモデルでは，バックログが待ち時間の関数である場合や確率的な需要など様々な仮定ができる．これらについては今後の検討課題とする．

参考文献

[1] Abad, P.L., Optimal pricing and lot sizing under conditions of perishability and partial backordering, *Management Science*, **42**, 1093-1104, (1996).

[2] Aggarwal, S.P., and C.K. Jaggi, Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments, *Journal of the Operarional Research Society*, **46**, 658-662, (1995).

[3] Benkherouf, L., A deterministic order level inventory model for deteriorating items with two storage facilities, *International Journal of Production Economics*, **48**, 167-175, (1997).

[4] Chand, S., and J.Ward, A note on economic order quantity under conditions of permissible delay in payments, *Journal of the Operational Research Society*, **38**, 83-84, (1987).

[5] Dave, U., On the EOQ models with two levels of storage, *Opsearch*, **25**, 190-196, (1988).

[6] Dye, C.Y., L.Y.Ouyang, and T.P.Hsieh, Deterministic inventory model for deteriorating items with capacity constraint and time-proportional backlogging rate, *European Journal of Operational Research*, **178**, 789-807, (2007).

[7] Ghare, P.M., and G.H.Schrader, A model for exponentially decaying inventory system, *International Journal of Production Research*, **21**, 449-460, (1963).

[8] Goswami, A. and K.S.Chaudhuri, On an inventory model with two levels of storage and stock-dependent demand rate, *International Journal of Systems Sciences*, **29**, 249-254, (1998).

[9] Goyal, S.K., Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments, *Journal of the Operational Research Society*, **36**, 335-338, (1985).

[10] Hartley, R.V., *Operations Research - A managerial Emphasis*, Good Year Publishing Company, California, 315-317, (1976).

[11] Huang, Y.F., Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing, *Journal of Operational Research Society*, **54**, 1011-1015, (2003).

[12] Jamal, A.M., B.R.Sarker, and S.Wang, An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment, *Journal of the Operarional Research Society*, **48**, 826-833, (1997).

[13] Misra, R.B., Oprimum production lot size model for a system with deteriorating inventory, *International Journal of Production Research*, **13**, 495-505, (1975).

[14] Pakkala, T.P.M., and K.K. Achary, A deterministic inventory model for deteriorating items with two warehouses and finite replenishment rate, *European Journal of Operational Research*, **57**, 71-76, (1992).

[15] Sarma, K.V.S, A deterministic inventory model with two level of strage and an optimum release rule, *Opsearch*, **20**, 175-180, (1983).

[16] Wee, H.M., and S.H.Law, Economic production lot size for deteriorating items taking account of the time-value of money, *Computers and Operations Research*, **26**, 545-558, (1999).

[17] Yang, H.L., Two-warehouse inventory models for deteriorating items with shortages under inflation, *European Journal of Operational Research*, **30**, 2115-2134, (2004).

[18] Zhou, Y.W., A multi-warehouse inventory model for items with time-varying demand and shortages, *Computers & Operations Research*, **30**, 2115-2134, (2003).